REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : 1998

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Durée : 4 heures	**Date : 8 Juin 1998**	**Heure : 8H**	**Nb pages : 4**
Barème : Partie A : 5 points ,	**Partie B : 10 points,**	**Partie C : 5 points**	

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. L'USAGE DES CALCULATRICES N'EST PAS AUTORISÉ.

IL EST RAPPELÉ QUE TOUT RÉSULTAT ÉNONCÉ DANS LE TEXTE PEUT ÊTRE UTILISÉ POUR TRAITER LA SUITE, MÊME S'IL N'A PU ÊTRE DÉMONTRÉ .

Partie A

I. – Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que la suite I_n des intégrales de Wallis vérifie la relation de récurrence
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$
2. En déduire que
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad , \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
3. Montrer que $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$.
4. En déduire la formule de Wallis
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

I I . – Pour tout réel t, on pose $G_1(t) = \psi_1(\frac{t}{2\pi})$ où ψ_1 désigne la fonction numérique de période 1, définie sur $[0,1[$ par $\psi_1(t) = t - \frac{1}{2}$.

1. Etudier la fonction G_1 et donner son graphe sur $[-\pi, 2\pi]$.
2. Donner le développement en série de Fourier de G_1.
3. En déduire en fonction de ψ_1 la somme de la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi t)}{k}.$$

Partie B

I. –

1. Soit g une fonction numérique continue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction G définie sur $[0,1]$ vérifiant

$$\begin{cases} \bullet\ G \text{ est dérivable sur } [0,1], \\ \bullet\ G'(t) = g(t), \\ \bullet\ \displaystyle\int_0^1 G(t)dt = 0. \end{cases}$$

2. Pour tout réel $t \in [0,1]$, on pose $B_0(t) = 1$. Montrer que les conditions

$$\begin{cases} \bullet\ B'_{n+1}(t) = B_n(t), t \in [0,1], \\ \bullet\ \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0; \end{cases}$$

définissent une unique suite de fonctions polynomiales. Préciser le degré de B_n et expliciter B_1, B_2 et B_3.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \geq 0$, on a $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$.

II. – Pour tout entier n, on désigne par ψ_n la fonction numérique, de période 1, définie sur $[0,1[$ par $\psi_n(t) = B_n(t)$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction ψ_{2n} est paire et la fonction ψ_{2n+1} est impaire.

2. Pour tout $n \geq 2$ et tout réel t, on pose $G_n(t) = \psi_n(\frac{t}{2\pi})$. Donner le développement en série de Fourier de G_n.

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et tout réel t

$$\psi_{2n}(t) = (-1)^{n+1} \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kt)}{k^{2n}} ;$$

$$\psi_{2n+1}(t) = (-1)^{n+1} \frac{2}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kt)}{k^{2n+1}} .$$

4. Donner la somme de chacune des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

5. Pour tout $n \geq 1$, on pose $b_n = B_n(0)$.

   (a) Montrer que

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= 0\ ,\ n \geq 1; \\ b_{2n} &= (-1)^{n+1} \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}\ ,\ n \geq 1. \end{aligned}$$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. (On pourra montrer que $|b_n| \leq \dfrac{\pi^2}{3(2\pi)^{2n}}$.)

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel p, on a

$$\int_p^{p+1} f'(t)\psi_1(t)dt = \frac{f(p+1)+f(p)}{2} - \int_p^{p+1} f(t)dt.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a la formule d'Euler- Mac-laurin

$$\sum_{p=0}^{n} f(p) = \int_0^n f(t)dt + \int_0^n f'(t)\psi_1(t)dt + \frac{f(0)+f(n)}{2}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{Log}J_n(x) = x\mathrm{Log}n - \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Log}(\frac{x+p}{1+p}) - \mathrm{Log}(n+1).$$

3. En appliquant la formule d'Euler- Mac-laurin à la fonction $f(t) = \mathrm{Log}(\frac{x+t}{1+t})$ où $x > 0$, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} \mathrm{Log}(\frac{x+p}{1+p}) = -(x-\frac{1}{2})\mathrm{Log}x + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(\frac{x+n}{1+n}) + (n+x)\mathrm{Log}(n+x) - (n+1)\mathrm{Log}(n+1) + A_n(x) - A_n(1),$$

avec $A_n(x) = \int_0^n \frac{\psi_1(t)}{x+t}dt$.

4. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$\mathrm{Log}(\Gamma(x)) = (x-\frac{1}{2})\mathrm{Log}(x) - x + 1 + \lim_{n\to+\infty}(A_n(1) - A_n(x)).$$

5. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'application $t \to \frac{\psi_2(t)}{(x+t)^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\psi_2(t)}{(x+t)^2}dt - \frac{\psi_2(0)}{x}.$$

(b) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\psi_2(t)}{(x+t)^2}dt = 0.$$

6. Conclure, en utilisant la formule de Wallis, que

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, e^{-x}x^x(1+\epsilon(x)),$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$. (Formule de Stirling).